Математички факултет у Београду
Студентско такмичење из математике, 10.12.2016.
МАТФ 2016✠.

На Математичком факултету у Београду у суботу 10.12.2016. је одржано такмичење из математике и информатике за студенте и средњошколце. Ове године је такмичење из математике организовано у две категорије. У првој („млађој") су се такмичили ученици средњих школа, а у другој („старијој") студенти прве две године факултета. У организацији математичког дела такмичења учествовали су Миљан Кнежевић, Ђорђе Кртинић, Милан Лазаревић, Петар Мелентијевић, Марија Микић и Марко Радовановић, док је у целокупној организацији учествовао велики број студената и чланова наставног и ненаставног особља факултета.

Ове године такмичило се 12 средњошколаца:

1. Кристина Бабић, Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац

2. Нина Бусарац, Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац

3. Данко Ђорђевић, Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац

4. Андреј Зељковић, Четврта гимназија, Београд

5. Алекса Милојевић, Математичка гимназија, Београд

6. Ивона Михајловић, Електротехничка школа „Никола Тесла", Панчево

7. Вукашин Пиштељић, Гимназија „Свети Сава", Београд

8. Софија Поповић, Гимназија „Свети Сава", Београд

9. Лазар Смиљковић, Гимназија „Вук Караџић", Трстеник

10. Дарко Сретеновић, Четврта гимназија, Београд

11. Дино Ћерамигић, Математичка гимназија, Београд

12. Јасмина Хорват, Прва крагујевачка гимназија, Крагујевац

и 5 студената прве или друге године (сви са Математичког факултета):

1. Милан Алимпић, ММ 1/15

2. Душица Браловић, ММ 59/15

3. Богдана Јелић, ММ 2/15

4. Никола Садовек, ММ 1/16

5. Миодраг Радојевић, ММ 66/15

и решавали 5 задатака у оквиру млађе, а 6 у оквиру старије категорије. Задаци и решења се могу наћи у наставку текста.

Након одржаног такмичења комисија је прегледала радове и прогласила најбоље такмичаре. Награђени средњошколци су:

Алекса Милојевић, **I** награда,

Дино Ћерамигић, **II** награда,

Вукашин Пиштељић, **III** награда,

а награђени студенти су:

Миодраг Радојевић, **I** награда,

Богдана Јелић, **II** награда,

Милан Алимпић, **III** награда.

Надамо се да ће такмичење допринети да се повећа ниво знања код ученика и студената, као и да ће наредних година бити веће заинтересованости и код учесника и код наставног особља.

На крају користимо прилику да се захвалимо иницијаторима, спонзорима, као и људима који су потпомогли организацију такмичења.

Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 10.12.2016.
млађа категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ и $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} > 0$. Колико ненегативних нула може имати полином

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \sum_{k=0}^{n-3} a_k x^k?$$

2. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $S = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N} \wedge x_1 + \ldots + x_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\big\}$. Одредити

$$\sup_S (x_1 + \ldots + x_n).$$

3. Нека су $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ узајамно прости полиноми такви да је $f + g = h$. Доказати да је број различитих нула полинома fgh већи од степена полинома f.

4. Нека је $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ низ конвергентан бројева из $(0,1)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ и

$$x_{n+1} = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)y_n, \qquad y_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n y_n,$$

за $n \in \mathbb{N}$.

(а) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \in (0,1)$, доказати да су низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ конвергентни и да конвергирају ка истој граничној вредности.

(б) Важи ли тврђење ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \in \{0,1\}$?

5. Нека је p непаран прост број и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је

$$\left|\left\{k \,\middle|\, 1 \leqslant k \leqslant p^n - 1,\ p \nmid \binom{2k}{k}\right\}\right| = \left(\frac{p+1}{2}\right)^n - 1.$$

Време за рад: 4 сата

Сваки задатак вреди 10 поена

Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 10.12.2016.
старија категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $S = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N} \wedge x_1 + \ldots + x_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\big\}$. Одредити

$$\sup_S (x_1 + \ldots + x_n).$$

2. Нека је K коначно поље са барем 4 елемента. Доказати да се $K^* = K \setminus \{0\}$ може поделити на два дела A и B тако да важи

$$\left(\sum_{x \in A} x\right)\left(\prod_{y \in B} y\right) = 1.$$

3. Нека је $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ квадратна матрица чији су елементи реални бројеви и нека је за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ испуњено $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$. Доказати да је матрица $I - A$ инвертибилна, где је I јединична матрица реда n.

4. Нека је $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, тако да је $\displaystyle\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ и $\displaystyle\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$. Доказати да f мора имати бар две нуле.

5. Нека су $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ узајамно прости полиноми такви да је $f + g = h$. Доказати да је број различитих нула полинома fgh већи од степена полинома f.

6. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ три пута диференцијабилна функција. Доказати да постоји $c \in (-1, 1)$ тако да важи

$$\frac{f'''(c)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

Време за рад: 4 сата
Сваки задатак вреди 10 поена

МАТФ 2016✠.

Решења задатака, млађа категорија

1. Нека је $f(x) = x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}$ и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-3} a_k x^{k-n+2}$. На $(0,\infty)$ број нула полинома једнак је броју решења једначине $f(x) = g(x)$. Како је $f'(x) = 2x + a_{n-1} > 0$ за $x \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = a_{n-2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и $g'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-3}(k+2-n)a_k x^{k-n+1} \leqslant 0$ за $x \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, следи да је $f(x) - g(x)$ на $(0,\infty)$ строго растућа (па може имати највише једну нулу), а како је непрекидна и важи $\lim\limits_{x\to 0+}(f(x) - g(x)) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \infty$, на основу својства међувредности следи да има бар једну нулу.

Следи да уочени полином има тачно једну нулу на $(0,\infty)$.

2. Без умањења општости, нека је $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Из услова задатка је $n \leqslant x_1 + \ldots + x_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, па је $x_n \geqslant 2$. Ако је $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 1$, следи $n - 1 + x_n = x_n$, што је немогуће, па је $x_n \geqslant x_{n-1} \geqslant 2$. Нека је $y_i = x_i - 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. По услову задатка следи $n + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 + y_i) \geqslant 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i + y_n \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i$. Како је $1 + xy \geqslant x + y$ (последње је еквивалентно са $(x-1)(y-1) \geqslant 0$; притом се једнакост достиже ако и само ако је $x = 1$ или $y = 1$), следи $n \geqslant 1 + y_n \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i = 1 + y_n y_{n-1} + y_n \cdot \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1}\Big) \geqslant y_{n-1} + y_n + \Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1}\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, па је $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant 2n$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $y_{n-1} = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1} = 0$, тј. ако и само ако је $x_1 = x_2$ у случају $n = 2$, односно $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = n$ у случају $n \geqslant 3$. Следи да је тражени супремум $2n$.

3. Како је $f + g = h$, из $(f,g,h) = 1$ следи да су f,g,h су узајамно прости и у паровима, тако да је број различитих нула полинома fgh једнак $\deg f - \deg \mathrm{NZD}(f,f') + \deg g - \deg \mathrm{NZD}(g,g') + \deg h - \deg \mathrm{NZD}(h,h')$ (полином из $\mathbb{C}[x]$ степена n има n комплексних нула; ако је $k \in \mathbb{N}$ ред нуле α полинома f, онда је α нула реда $k-1$ полинома f').

Нека је $F = fg' - f'g$ (ако је α нула реда $k \in \mathbb{N}$ полинома f, како је $(f,g) = 1$, није нула полинома g, те је нула реда $k-1$ полинома F, па важи $F \neq 0$). Онда је $F = f(h-f)' - f'(h-f) = fh' - hf'$ и $F = (h-g)g' - (h-g)'g = hg' - h'g$, па како је $(f,g,h) = 1$, следи $\mathrm{NZD}(f,f')\,\mathrm{NZD}(g,g')\,\mathrm{NZD}(h,h') \mid F$. Како је $\deg F < \deg g + \deg h$, следи

$$\begin{aligned}\deg fgh &= \deg f + (\deg g + \deg h) - (\mathrm{NZD}(f,f') + \mathrm{NZD}(g,g') + \mathrm{NZD}(h,h'))\\ &\geqslant \deg f + (\deg g + \deg h) - \deg F > \deg f.\end{aligned}$$

4. За свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи (одузимањем веза из задатка) $x_{n+1} - y_{n+1} = (1 - 2\lambda_n)(x_n - y_n)$, па је $x_{n+1} - y_{n+1} = (x_0 - y_0) \cdot \prod\limits_{k=0}^{n}(1 - 2\lambda_k)$. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \in (0,1)$, постоји n_0 тако да за $n \geqslant n_0$ важи $|2\lambda_n - 1| \leqslant \mu = \max\{\lambda, 1-\lambda\} < 1$ (ако је $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ и $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$, почев од неког n је $0 \leqslant 2\lambda_n - 1 \leqslant 2(\lambda+\varepsilon) - 1 = \lambda = \max\{\lambda, 1-\lambda\}$; ако је $\lambda < \frac{1}{2}$ и $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$, почев од неког n је $0 \leqslant 1 - 2\lambda_n \leqslant 1 - 2(\lambda - \varepsilon) = 1 - \lambda = \max\{\lambda, 1-\lambda\}$), па је (за $n > n_0$) $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant |x_0 - y_0| \cdot \prod\limits_{k=0}^{n_0}|1 - 2\lambda_k| \cdot \mu^{n-n_0} \to 0$ кад $n \to \infty$, тј. низ $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ конвергира ка 0.

Такође је (сабирањем веза из задатка) $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, па је $x_n + y_n = x_0 + y_0$, тј. и низ $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ је конвергентан. Следи да су конвергентни и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{x_0 + y_0}{2}$.

Ако је $\lambda_n = \frac{1}{2(n+2)^2}$ за $n \in \mathbb{N}_0$, онда је $1 - 2\lambda_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$, па је $|x_{n+1} - y_{n+1}| = |x_0 - y_0| \cdot \frac{n+3}{2(n+2)}$, па ако је $x_0 \neq y_0$, следи да $|x_{n+1} - y_{n+1}| \not\to 0$ кад $n \to \infty$, те у овом случају низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ не морају конвергирају ка истој граничној вредности.

Ако је $\lambda_n = 1 - \frac{1}{2(n+2)^2}$ за $n \in \mathbb{N}_0$, онда је $2\lambda_n - 1 = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$, па је $|x_{n+1} - y_{n+1}| = |x_0 - y_0| \cdot \frac{n+3}{2(n+2)}$, па ако је $x_0 \neq y_0$, следи да $|x_{n+1} - y_{n+1}| \to \frac{|x_0 - y_0|}{2} \neq 0$ кад $n \to \infty$, те у овом случају низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ не морају конвергирати ка истој граничној вредности.

5. Нека је $k=\sum_{j=0}^{n-1} c_j p^j$, $0 \leqslant c_j \leqslant p-1$ запис броја k у систему са основом p (сваки број $0 \leqslant k \leqslant p^n-1$ једнозначно одређује овакву n-торку, а свака оваква n-торка одређује такав број; природним бројевима одговарају све овакве n-торке различите од $(0,0,\ldots,0)$). Највећи степен броја p који дели $k!$ (за $k>0$) једнак је $m=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\frac{k}{p^i}\Big]=\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=i}^{n-1} c_j p^{j-i}\Big)=\sum_{j=0}^{n-1}\Big(c_j \sum_{i=0}^{j-1} p^i\Big)=\sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{p^j-1}{p-1}$, док је највећи степен броја p који дели $(2k)!$ (за $k>0$) једнак $l=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\frac{2k}{p^i}\Big]=\sum_{i=1}^{n-1}\Big[\sum_{j=i}^{n} 2c_j p^{j-i}+\frac{2c_{i-1}}{p}\Big]=\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=i}^{n-1} 2c_j p^{j-i}\Big)+\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{2c_{i-1}}{p}\Big]=2m+\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\frac{2c_i}{p}\Big]$. Следи да је степен броја p који дели $\binom{2k}{k}$ једнак $l-2m=\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\frac{2c_i}{p}\Big]$, па је $\binom{2k}{k}$ (за $k>0$) дељив са p ако и само ако је $\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\frac{2c_i}{p}\Big]=0$, тј. ако и само ако је $2c_i<p$ за све $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Следи да бројева са овим својством има колико има описаних n-торки, односно $\left(\frac{p+1}{2}\right)^n$, а како се међу овим n-торкама налази и $(0,0,\ldots,0)$, следи да тражених бројева има $\left(\frac{p+1}{2}\right)^n-1$.

МАТФ 2016✠.

Решења задатака, старија категорија

1. Без умањења општости, нека је $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Из услова задатка је $n \leqslant x_1+\ldots+x_n = x_1\cdot\ldots\cdot x_n$, па је $x_n \geqslant 2$. Ако је $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 1$, следи $n-1+x_n = x_n$, што је немогуће, па је $x_n \geqslant x_{n-1} \geqslant 2$. Нека је $y_i = x_i - 1$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. По услову задатка следи $n + \sum_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n}(1+y_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} y_i + y_n \sum_{i=1}^{n-1} y_i$. Како је $1 + xy \geqslant x + y$ (последње је еквивалентно са $(x-1)(y-1) \geqslant 0$; притом се једнакост достиже ако и само ако је $x = 1$ или $y = 1$), следи $n \geqslant 1 + y_n \sum_{i=1}^{n-1} y_i = 1 + y_n y_{n-1} + y_n \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1}\Big) \geqslant y_{n-1} + y_n + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1}\Big) = \sum_{i=1}^{n} y_i$, па је $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 2n$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $y_{n-1} = 1$ и $\sum_{i=1}^{n-1} y_i - y_{n-1} = 0$, тј. ако и само ако је $x_1 = x_2$ у случају $n = 2$, односно $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 2$, $x_n = n$ у случају $n \geqslant 3$. Следи да је тражени супремум $2n$.

2. Производ елемената из K^* је -1 тако да за сваку дисјунктну поделу (A, B) скупа K^* важи $\big(\prod_{x\in A} x\big)\big(\prod_{y\in B} y\big) = -1$. Дакле, довољно је наћи подскуп A скупа K^* такав да је $\sum_{x\in A} x = -\prod_{y\in A} y$.

Ако је карактеристика K једнака 2 то се постиже, на пример, избором $A = \{1\}$, а ако је карактеристика K већа од 2, може се изабрати $A = \{1, -1, a\}$, где је $a \notin \{1, -1\}$ произвољан елемент K^*.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дефинисано са $L(x) = (I - A)x$, где је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Матрица $I - A$ је инвертибилна ако и само ако је $\ker L$ тривијалан потпростор $\mathbb{R}^n$, односно ако и само ако је $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ако је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ произвољан ненула вектор из R^n, важи $|x_i| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \big\{|x_1, |x_2|, \ldots, |x_n|\big\} > 0$ за неко $1 \leqslant i \leqslant n$, па ако је $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = L(x)$, следи

$$|y_i| = \big|x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\big| \geqslant |x_i| - \big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\big| \geqslant |x_i| - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \geqslant |x_i| - |x_i|\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \geqslant |x_i\big(1 - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\big) > 0,$$

па је $y \neq 0$, одакле следи тврђење задатка.

4. Ако f нема нула, како је непрекидна на $[0, \pi]$, следи да је константног знака, па како је и $\sin x$ константног знака на овом интервалу, не може бити $\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$.

Нека је $f(a) = 0$ и a једина нула f на $(0, \pi)$. Како је и $\sin x$ константног знака на овом интервалу, следи да је знак f на $(0, a)$ константан и различит од знака f на (a, π). Следи $\int_0^{\pi} f(x)\sin(x - a) = \cos a \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx - \sin a \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$, што је немогуће, јер је онда $f(x)\sin(x - a)$ истог знака на $(0, a) \cup (a, \pi)$.

5. Како је $f + g = h$, из $(f, g, h) = 1$ следи да су f, g, h су узајамно прости и у паровима, тако да је број различитих нула полинома fgh једнак $\deg f - \deg \mathrm{NZD}(f, f') + \deg g - \deg \mathrm{NZD}(g, g') + \deg h - \deg \mathrm{NZD}(h, h')$ (полином из $\mathbb{C}[x]$ степена n има n комплексних нула; ако је $k \in \mathbb{N}$ ред нуле α полинома f, онда је α нула реда $k - 1$ полинома f').

Нека је $F = fg' - f'g$ (ако је α нула реда $k \in \mathbb{N}$ полинома f, како је $(f, g) = 1$, није нула полинома g, те је нула реда $k - 1$ полинома F, па важи $F \neq 0$). Онда је $F = f(h - f)' - f'(h - f) = fh' - hf'$ и $F = (h - g)g' - (h - g)'g = hg' - h'g$, па како је $(f, g, h) = 1$, следи $\mathrm{NZD}(f, f')\,\mathrm{NZD}(g, g')\,\mathrm{NZD}(h, h') \mid F$. Како је $\deg F < \deg g + \deg h$, следи

$$\begin{aligned} \deg fgh &= \deg f + (\deg g + \deg h) - (\mathrm{NZD}(f, f') + \mathrm{NZD}(g, g') + \mathrm{NZD}(h, h')) \\ &\geqslant \deg f + (\deg g + \deg h) - \deg F > \deg f. \end{aligned}$$

6. Нека је $g(x) = f(x) + \frac{f(-1)}{2}\cdot x^2(x-1) - \frac{f(1)}{2}\cdot x^2(x+1) + f(0)(x^2-1) + f'(0)x(x-1)(x+1)$. Функција g је три пута диференцијабилна и важи $g(-1) = g(0) = g(1) = g(-1) = g'(0) = 0$.

На основу Ролове теореме, из $g(-1) = g(0) = 0$ следи да постоји $a \in (-1, 0)$ тако да је $g'(a) = 0$. На основу Ролове теореме, из $g(0) = g(1) = 0$ следи да постоји $b \in (-1, 0)$ тако да је $g'(b) = 0$.

На основу Ролове теореме, из $g'(a) = g'(0) = 0$ следи да постоји $a_1 \in (a, 0)$ тако да је $g''(a_1) = 0$. На основу Ролове теореме, из $g'(0) = g'(b) = 0$ следи да постоји $b_1 \in (0, b)$ тако да је $g''(b_1) = 0$.

На основу Ролове теореме, из $g''(a_1) = g''(b_1) = 0$ следи да постоји $c \in (a_1, b_1)$ тако да је $g'''(c) = 0$. Како је $g'''(x) = f'''(x) + 3\big(f(-1) - f(1)\big) + 6f'(0)$, следи $0 = g'''(c) = f'''(c) + 3\big(f(-1) - f(1)\big) + 6f'(0)$, односно $\dfrac{f'''(c)}{6} = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0)$.