Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 19.03.2016.

МАТФ 2016.

На Математичком факултету у Београду у суботу 19.03.2016. је одржано такмичење из математике и информатике за студенте и средњошколце. Ове године је такмичење из математике организовано у две категорије. У првој („млађој") су се такмичили ученици средњих школа, а у другој („старијој") студенти прве две године факултета. У избору задатака и/или прегледу учествовали су Миљан Кнежевић, Ђорђе Кртинић и Марко Радовановић, док је у организацији учествовао велики број студената и чланова наставног и ненаставног особља факултета.

Ове године такмичило се 4 средњошколца:

1. Ђумић Јован, Девета гимназија „Михајло Петровић Алас", Београд

2. Максић Никола, Прва београдска гимназија, Београд

3. Париповић Александар, Гимназија „Милена Павловић Барили", Београд

4. Садовек Никола, Математичка гимназија, Београд

и 5 студената прве или друге године (сви са Математичког факултета):

1. Антић Ана, МВ 113/15

2. Браловић Душица, ММ 59/15

3. Дробњак Душан, ММ 43/14

4. Јелић Богдана, ММ 2/15

5. Радојевић Миодраг, ММ 66/15

и решавали 5 задатака у оквиру млађе, а 6 у оквиру старије категорије. Задаци и решења се могу наћи у наставку текста.

Након одржаног такмичења комисија је прегледала радове и прогласила најбоље такмичаре. Награђени средњошколци су:

Садовек Никола, **I** награда

Париповић Александар, **II** награда

Максић Никола, **III** награда

а награђени студенти су:

Дробњак Душан, **I** награда

Јелић Богдана, **II** награда

Браловић Душица, **III** награда

Радојевић Миодраг, **IV** награда

Надамо се да ће такмичење допринети да се повећа ниво знања код ученика и студената, да неће остати само на овогодишњем издању и да ће наредних година бити веће заинтересованости и код студената и код наставног особља.

На крају користимо прилику да се захвалимо иницијаторима, спонзорима, као и људима који су потпомогли организацију такмичења (пре свега колегама са катедре за рачунарство).

Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 19.03.2016.
млађа категорија

1. Нека су A и B непразни подскупови скупа реалних бројева, такви да је $a \leqslant b$ за свако $a \in A$ и свако $b \in B$. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

(1) $\sup A = \inf B$;

(2) За свако $\varepsilon > 0$ постоје $a \in A$ и $b \in B$, тако да је $b - a < \varepsilon$.

2. Нека је $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ матрица $(a_{i,j} \in \mathbb{C})$ таква да за свако $m \in \{1,2,3\}$ и $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant 3$ важи $\det[a_{j_i,j_k}]_{1 \leqslant i,k \leqslant m} = 0$. Доказати да је $A^3 = 0$.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати да важи

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leqslant 1.$$

4. Нека су $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\cos a = a, \ \sin\cos b = b, \ \cos\sin c = c.$$

Који је од бројева a, b, c најмањи, а који највећи?

5. Да ли постоји полином $p(x)$ са реалним коефицијентима, тако да:

(1) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ није инјективно;

(2) $p(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$;

(3) рестрикција p на $\mathbb{Q}$ је инјективна?

Време за рад: 4 сата
Сваки задатак вреди 10 поена

Математички факултет у Београду

Студентско такмичење из математике, 19.03.2016.
старија категорија

1. Нека је $\lambda \in \mathbb{R}$ и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева за који је $x_{n+2} \leqslant \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

(а) За које λ мора постојати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ у $\mathbb{R}$?

(б) За које λ мора постојати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ у $\overline{\mathbb{R}}$?

2. Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрекидно–диференцијабилна функција и нека је $f(0) = 0$. Доказати да важи

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Нека је G коначна група реда n, таква да скуп

$$H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$$

има p елемената (e је неутрал групе G). Доказати да важи:

(а) $|H \cap xH| \geqslant 2p - n$, за свако $x \in G$;

(б) ако је $p > \dfrac{3n}{4}$, онда је G комутативна;

(в) ако је $\dfrac{3n}{4} \geqslant p > \dfrac{n}{2}$, онда G није комутативна.

4. Да ли постоји полином $p(x)$ са реалним коефицијентима, тако да:

(1) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ није инјективно;

(2) $p(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$;

(3) рестрикција p на $\mathbb{Q}$ је инјективна?

5. Нека је $A = [a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ матрица ($a_{i,j} \in \mathbb{C}$) таква да за свако $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant n$ важи $\det[a_{j_i,j_k}]_{1\leqslant i,k\leqslant m} = 0$. Доказати да важи:

(а) постоји пермутација $\sigma \in \mathbb{S}_n$ таква да је матрица $[a_{\sigma(i),\sigma(k)}]_{1\leqslant i,k\leqslant n}$ горње–троугаона са нулама на главној дијагонали;

(б) $A^n = 0$.

6. Одредити за које $a \in [0, \infty)$ постоји непрекидна $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да је

$$f(f(x)) = (x-a)^2 \quad \text{за свако} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Време за рад: 4 сата
Сваки задатак вреди 10 поена

МАТФ 2016.

Решења задатака, млађа категорија

1. Скуп A је непразан, ограничен одозго (произвољним елементом скупа B), па постоји $\sup A \in \mathbb{R}$, а аналогно постоји и $\inf B \in \mathbb{R}$.

Ако је $\sup A = \inf B = r$, следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоје $a \in A$ и $b \in B$ тако да је $a \in \left(r - \frac{\varepsilon}{2}, r\right]$ и $b \in \left[r, r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. За такве a и b је $b - a < \varepsilon$.

Ако је $b \in B$, како за свако $a \in A$ важи $a \leqslant b$, следи $\sup A \leqslant b$, а одатле и $\sup A \leqslant \inf B$. Ако су a и b такви да је $b - a < \varepsilon$, следи $a \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b$, па је $0 \leqslant \inf B - \sup A < \varepsilon$ за свако $\varepsilon > 0$, па мора бити $\sup A = \inf B$.

2. За $m = 1$ следи $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 0$. За $m = 2$, уз претходно добијен услов, следи

$$0 = \det\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{bmatrix} = -a_{1,2}a_{2,1}, \quad 0 = \det\begin{bmatrix} 0 & a_{1,3} \\ a_{3,1} & 0 \end{bmatrix} = -a_{1,3}a_{3,1}, \quad 0 = \det\begin{bmatrix} 0 & a_{2,3} \\ a_{3,2} & 0 \end{bmatrix} = -a_{2,3}a_{3,2},$$

па је $A^2 = \begin{bmatrix} a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} & a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,2}a_{2,3} \\ a_{2,3}a_{3,1} & a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,3}a_{3,2} & a_{2,1}a_{1,3} \\ a_{3,2}a_{2,1} & a_{3,1}a_{1,2} & a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,2}a_{2,3} \\ a_{2,3}a_{3,1} & 0 & a_{2,1}a_{1,3} \\ a_{3,2}a_{2,1} & a_{3,1}a_{1,2} & 0 \end{bmatrix}$, а за $m = 3$ (уз коришћење претходно добијених услова) следи $0 = \det\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{bmatrix} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$, па је

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,2}a_{2,3} \\ a_{2,3}a_{3,1} & 0 & a_{2,1}a_{1,3} \\ a_{3,2}a_{2,1} & a_{3,1}a_{1,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} & (a_{1,3}a_{3,1})a_{1,2} & (a_{1,2}a_{2,1})a_{1,3} \\ (a_{2,3}a_{3,2})a_{2,1} & a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} & (a_{2,1}a_{1,2})a_{2,3} \\ (a_{3,2}a_{2,3})a_{3,1} & (a_{3,1}a_{3,2})a_{1,3} & a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Множењем неједнакости са $(a+2)(b+2)(c+2) > 0$ добија се еквивалентна неједнакост

$$\begin{aligned} & (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) &\leqslant& \ (a+2)(b+2)(c+2) \\ \Leftrightarrow\ & (ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 12 &\leqslant& \ abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - abc &\leqslant& \ ab+bc+ca, \end{aligned}$$

тј. $3 \leqslant ab + bc + ca$ (пошто је $abc = 1$). Међутим, последња неједнакост је тачна, пошто на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине (уз услов $abc = 1$) следи

$$ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3.$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $ab = bc = ca$ (уз услов $abc = 1$), тј. ако и само ако је $a = b = c = 1$.

4. Ако је $a \leqslant b$, следи $\cos b \leqslant \cos a$ (функција $\cos x$ опада на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), па следи $\sin\cos b \leqslant \sin\cos a$ (функција $\sin x$ расте на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а $\cos\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), па је $b = \sin\cos b \leqslant \sin\cos a < \cos a = a$ (јер за $t > 0$ важи $\sin t < t$), што је контрадикција. Следи да је $b < a$.

Ако је $c \leqslant a$, следи $\sin c < c$ (јер за $t > 0$ важи $\sin t < t$), па је $c = \cos\sin c > \cos c \geqslant \cos a = a$ (функција $\cos x$ опада на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), што је контрадикција. Следи да је $a < c$.

Дакле, важи $b < a < c$.

5. Ако је $p(x) = x^3 - 2x$, како су $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ поља (и $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$), други услов је тривијално испуњен, а важи и $p(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Како је $p(0) = 0 = p(\sqrt{2})$, испуњен је и први услов.

Ако су $x \neq y$ такви да је $x, y \in \mathbb{Q}$ и $p(x) = p(y)$, следи $0 = (x^3 - y^3) - 2(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2)$, па је $2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2$. Ако је $a = x + \frac{y}{2}$ и $b = \frac{y}{2}$, следи $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a^2 + 3b^2 = 2$. Следи $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, где је $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $(p_1, q_1) = 1$, $(p_2, q_2) = 1$, па је $(p_1q_2)^2 + 3(p_2q_1)^2 = 2(q_1q_2)^2$.

Дакле, једначина $x^2 + 3y^2 = 2z^2$ има решења у $\mathbb{Z}^3$. Нека је (x, y, z) решење за које је $(x, y, z) = 1$. Ако је неки од x и z дељив са 3, онда је и други, па је $3y^2 = 2z^2 - x^2$ дељиво са 9. Следи $3 \mid y$, што је немогуће, јер је $(x, y, z) = 1$. Следи $3 \nmid x, z$, па x^2 и z^2 дају остатак 1 при дељењу са 3, тј. важи $1 \equiv x^2 + 3y^2 = 2z^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је немогуће. Следи да ова једначина нема решења у $\mathbb{Z}^3$, тј. ако је $p(x) = p(y)$, мора бити $x = y$, односно $p(x)$ задовољава и трећи захтев задатка.

Дакле, постоји полином са траженим својствима.

МАТФ 2016.

Решења задатака, старија категорија

1. Ако је $\lambda \geqslant 2$, низ $x_n = n$ за $n \in \mathbb{N}$ задовољава услов задатка (заиста, $x_{n+2} = n+2 \leqslant \lambda(n+1) + (1-\lambda)n = \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)x_n$) и притом нема граничну вредност у $\mathbb{R}$. Ако је $\lambda < 2$, низ $x_n = -n$ за $n \in \mathbb{N}$ задовољава услов задатка (заиста, $x_{n+2} = -n-2 \leqslant \lambda(-n-1) + (1-\lambda)(-n) = \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)x_n$) и притом нема граничну вредност у $\mathbb{R}$. Следи да ни за које λ се не може гарантовати конвергенција у $\mathbb{R}$.

Ако је $\lambda \leqslant 0$, низ $x_n = (\lambda-1)^n$ за $n \in \mathbb{N}$ задовољава услов задатка (заиста, $x_{n+2} = (\lambda-1)^{n+2} = \lambda(\lambda-1)^{n+1} - (\lambda-1)^{n+1} = \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)x_n$) и притом нема граничну вредност у $\overline{\mathbb{R}}$.

Ако је $\lambda \geqslant 1$, низ је монотон; заиста, како из $x_{n+2} - x_{n+1} \leqslant (\lambda-1)(x_{n+1} - x_n)$ следи да ако је $x_{n+1} \leqslant x_n$, онда је и $x_{n+2} \leqslant x_{n+1}$; следи да је или $x_{n+1} - x_n > 0$ за свако n (тј. низ је растући) или за неко m важи $x_{m+1} - x_m \leqslant 0$, а онда за свако $n \geqslant m$ индукцијом следи $x_{n+1} \leqslant x_n$ (тј. и у овом случају низ је монотон почев од члана са индексом m). Следи, ако је $\lambda \geqslant 1$ постоји гранична вредност низа у $\overline{\mathbb{R}}$.

Ако је $\lambda \in (0,1)$ важи $x_{n+2} = \lambda x_{n+1} + (1-\lambda)x_n \leqslant \max\{x_{n+1}, x_n\}$, па је $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \max\{x_0, x_1\} < \infty$. Аналогно, важи $x_n \leqslant \max\{x_m, x_{m+1}\}$ за све $n \geqslant m$.

Ако је $L = -\infty$, онда постоји гранична вредност низа у $\overline{\mathbb{R}}$.

Ако је $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $L \in \mathbb{R}$, постоји n за које је $x_{n+1} \leqslant \min\left\{\frac{L-1-(1-\lambda)\max\{x_0,x_1\}}{\lambda}, -L-1\right\}$, па је $x_{n+2} \leqslant \lambda \cdot \frac{L-1-(1-\lambda)\max\{x_0,x_1\}}{\lambda} + (1-\lambda)\max\{x_0, x_1\} \leqslant L-1$, одакле је $x_k \leqslant L-1$ за свако $k \geqslant n+2$, што је немогуће (јер би тада важило $-\infty < L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant L-1 < \infty$).

Ако је $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > -\infty$ и $l < L$, $l, L \in \mathbb{R}$, онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји m за које је $x_n \leqslant L + \varepsilon$ за свако $n \geqslant m$. Ако је $\varepsilon < \frac{(1-\lambda)(L-l)}{2}$ и за неко $n \geqslant m$ важи $x_{n+1} < l + \varepsilon$, следи $x_{n+2} \leqslant \lambda(L+\varepsilon) + (1-\lambda)(l+\varepsilon) < (\lambda L + (1-\lambda)l) + \varepsilon < (L - 2\varepsilon) + \varepsilon < L - \varepsilon$, што је немогуће (јер је тада $x_{n+1} < l + \varepsilon < L - \varepsilon$ и $x_{n+2} < L - \varepsilon$, па су сви наредни чланови строго мањи од $L - \varepsilon$, тј. L не може бити тачка нагомилавања низа). Дакле, ако је $l > -\infty$, мора бити $l = L$, тј. у овом случају постоји коначна гранична вредност.

Дакле, гранична вредност у $\overline{\mathbb{R}}$ мора постојати за $\lambda > 0$.

2. Како непрекидна функција достиже максимум на сегменту (компакту), лева страна неједнакости је добро дефинисана. Нека је $t \in [0,1]$ такво да је $f(t) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (такво t постоји, али не мора бити јединствено). На основу услова задатка и неједнакости Коши–Шварца, следи

$$\begin{aligned}\left(\max_{x\in[0,1]} |f(x)|\right)^2 &= |f(t)-f(0)|^2 = \left|\int_0^t f'(x)dx\right|^2 \leqslant \int_0^t |f'(x)|^2 dx \cdot \int_0^t 1^2 dx \\ &= t \cdot \int_0^t |f'(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $t = 1$ (због последње неједнакости; ако је $|f'(x)| = 0$ за свако x, због $f(0) = 0$ следи $f(x) = 0$ за свако x) и $f'(x) = c$ за неко $c \in \mathbb{R}$ (на основу достизања једнакости у Коши–Шварцу, важи $f'(x) = c$ на $[0,t]$ за свако $t \in [0,1]$, па је $f'(x) = c$ на $[0,1]$), тј. ако и само ако је $f(x) = cx$ за неко $c \in \mathbb{R}$.

3. Како за свако $x \in G$ важи $|xH| = |H|$, на основу формуле укључења–искључења следи $|H \cap xH| = |H| + |xH| - |H \cup xH| \geqslant p + p - n = 2p - n$.

Ако за $y, z \in H$ важи и $yz \in H$, онда је $yz = (yz)^{-1} = z^{-1}y^{-1} = zy$, па ако $y \in H \cap xH$, онда важи и $xy = yx$. Следи $H \cap xH \subseteq C(x) = \{y \mid xy = yx\}$, па је $|C(x)| \geqslant 2p - n$.

Ако је $p > \frac{3n}{4}$, следи $|C(x)| > \frac{n}{2}$, а како је $C(x)$ подгрупа групе G (заиста, ако $y \in C(x)$, следи $xy = yx$, па је $y^{-1}x = xy^{-1}$, тј. $y^{-1} \in C(x)$; такође, ако $y, z \in C(x)$, онда $xyz = yxz = yzx$, тј. $yz \in C(x)$), следи $C(x) = G$ (јер онда $|C(x)| \mid |G|$). Како ово важи за свако $x \in G$, следи да је G комутативна.

Коначно, ако је G комутативна и $x, y \in H$, важи $(xy)^2 = xyxy = x^2y^2 = e$, па следи $x^{-1}y = xy \in H$, тј. H је подгрупа G. Следи $p = |H| \mid |G| = n$, што није могуће при $\frac{n}{2} < p < n$.

4. Ако је $p(x) = x^3 - 2x$, како су $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ поља (и $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$), други услов је тривијално испуњен, а важи и $p(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Како је $p(0) = 0 = p(\sqrt{2})$, испуњен је и први услов.

Ако су $x \neq y$ такви да је $x, y \in \mathbb{Q}$ и $p(x) = p(y)$, следи $0 = (x^3 - y^3) - 2(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2)$, па је $2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2$. Ако је $a = x + \frac{y}{2}$ и $b = \frac{y}{2}$, следи $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a^2 + 3b^2 = 2$. Следи $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, где је $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $(p_1, q_1) = 1$, $(p_2, q_2) = 1$, па је $(p_1 q_2)^2 + 3(p_2 q_1)^2 = 2(q_1 q_2)^2$.

Дакле, једначина $x^2 + 3y^2 = 2z^2$ има решења у $\mathbb{Z}^3$. Нека је (x, y, z) решење за које је $(x, y, z) = 1$. Ако је неки од x и z дељив са 3, онда је и други, па је $3y^2 = 2z^2 - x^2$ дељиво са 9. Следи $3 \mid y$, што је немогуће, јер је $(x, y, z) = 1$. Следи $3 \nmid x, z$, па x^2 и z^2 дају остатак 1 при дељењу са 3, тј. важи $1 \equiv x^2 + 3y^2 = 2z^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је немогуће. Следи да ова једначина нема решења у $\mathbb{Z}^3$, тј. ако је $p(x) = p(y)$, мора бити $x = y$, односно $p(x)$ задовољава и трећи захтев задатка.

Дакле, постоји полином са траженим својствима.

5. Матрици A може се придружити оријентисан граф, чији је скуп чворова $\{1, 2, \ldots, n\}$, а (i, j) ивица ако и само ако је $a_{i,j} \neq 0$. Ако је A матрица која задовољава услове задатка и G њој придружен граф, онда G не садржи усмерен циклус. Заиста, ако је најкраћи циклус (један од) у G дужине m и ако њему одговара избор $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant n$, развојем детерминанте матрице $[a_{j_i, j_k}]_{1 \leqslant i,k \leqslant m}$ добија се да су сви сабирци 0 (због минималности циклуса) осим једног (који одговара уоченом циклусу), што је контрадикција са условом задатка.

Како граф придружен матрици из задатка не садржи циклус, он садржи чвор чији је или излазни или улазни степен нула (ако не би постојао такав чвор, кренувши из произвољног чвора по ивицама графа или се пут неће завршити или ће се неко теме поновити; због коначног скупа темена мора доћи до понављања чвора, па би постојао циклус). Следи да постоји пермутација π скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, таква да за све (i, j) такве да је $a_{\pi(i), \pi(j)} \neq 0$ важи $\pi(i) < \pi(j)$ (ако постоји чвор i чији је улазни степен 0, може се узети $\pi(1) = i$; ако постоји чвор j чији је излазни степен 0, може се узети $\pi(n) = j$; па тврђење следи индукцијом). А таква пермутација је тражена.

По првом делу задатка, матрица A има сличну матрицу која је горње–троугаона са нулама на главној дијагонали, па је њен карактеристични полином $(-\lambda)^n$ (сличне матрице имају једнаке карактеристичне полиноме). Како матрица поништава свој карактеристични полином, следи $A^n = 0$.

6. Ако је $f(x) = f(y)$, следи $(x - a)^2 = f(f(x)) = f(f(y)) = (y - a)^2$, па је или $x = y$ или $x - a = a - y$. Следи да је f инјективна на $(-\infty, a]$, као и на $[a, \infty)$, а како је и непрекидна, следи да је монотона на сваком од ових интервала. Притом f није инјективна на $\mathbb{R}$ (ако би била инјективна, онда је $c = f(0) \neq f(2a) = d$; али онда је $f(f(0)) = (0 - a)^2 = (2a - a)^2 = f(f(2a))$, тј. $f(c) = f(d)$, а $c \neq d$), па следи да није монотона на $\mathbb{R}$, а како из услова следи да није ограничена одозго, следи да f опада на $(-\infty, a]$, а расте на $[a, \infty)$. Следи да у тачки a функција f достиже минимум (и притом је $f(x) > f(a)$ за $x \neq a$), а како је $f(f(a)) = 0$, следи да је $f(a) \leqslant 0$.

Ако је $f(a) = 0$, следи $f(a) = 0 = f(f(a))$, а како је тачка минимума јединствена, следи $a = f(a) = 0$. У овом случају постоји функција са траженим својствима, $f(x) = |x|^{\sqrt{2}}$.

Ако је $a > 0$, важи $f(a) < 0 < a$. Из особина f следи да постоји $b > a$, тако да је $f(b) < 0$ (пошто је $f([a, \infty))$ повезан скуп (интервал)), а за уочено b (из непрекидности) следи да постоји $c > a$ тако да је $f(c) = b$. Следи $0 > f(b) = f(f(c)) = (c - a)^2 \geqslant 0$, што је немогуће. Следи да за $a > 0$ не постоји функција са траженим особинама.